Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

$2^{\underline{o}}$ Soluzioni del Recupero di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica 05–12–05

Problema n.1

Compito A. La funzione di cui cercare la serie di Fourier è $F(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \le x \le 2\pi \\ -\cos x & -2\pi \le x \le 0 \end{cases}$. Il periodo è $T = 4\pi$ e quindi il coefficiente di Fourier è $\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx F(x) \sin\frac{2\pi kx}{T} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} dx \cos x \sin\frac{kx}{2} = \frac{2k}{\pi}\frac{1-\cos\pi k}{k^2-4}$ e la serie di Fourier è $\sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{(2k+1)x}{2}\frac{8k+4}{\pi(4k^2+4k-3)}$

Compito B. La funzione di cui cercare la serie di Fourier è $F(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le 2\pi \\ -\sin x & -2\pi \le x \le 0 \end{cases}$. Il periodo è $T = 4\pi$ e quindi il coefficiente di Fourier è $\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx F(x) \cos\frac{2\pi kx}{T} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} dx \sin x \cos\frac{kx}{2} = \frac{4}{\pi}\frac{-1+\cos\pi k}{k^2-4}$ e la serie di Fourier è $\sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{(2k+1)x}{2}\frac{-8}{\pi(4k^2+4k-3)}$

Compito C. La funzione di cui cercare la serie di Fourier è $F(x) = \begin{cases} |\cos x| & 0 \le x \le \pi \\ -|\cos x| & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$. Il periodo è $T = 2\pi$ e quindi il coefficiente di Fourier è $\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx F(x) \sin\frac{2\pi kx}{T} = \frac{4}{T}(\int_0^{T/4} dx \cos x \sin kx + \int_{T/4}^{T/2} dx(-\cos x)\sin kx) = \frac{2}{\pi}\frac{2\sin\frac{k\pi}{2} + k(\cos\pi k - 1)}{k^2-1}$ e la serie di Fourier è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(2k+1)x \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi k) - 4k - 2}{4k^2+4k}$. Si noti il fatto che la serie comincia con $k=1$ in quanto l'integrale dei coefficienti di Fourier, per $k=1$, vale zero.

Compito D. La funzione di cui cercare la serie di Fourier è $F(x) = |\sin x|$. Il periodo è $T = \pi$ e quindi il coefficiente di Fourier è $\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx F(x)\cos\frac{2\pi kx}{T} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$ e la serie di Fourier è

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} \cos 2(2k+1)x \frac{1}{16k^2+16k+3}$$

Problema n.2

Scriviamo la funzione $F(x) = \begin{cases} x & -L/2 \le x \le L/2 \\ L - x & L/4 \le x \le L/2 \\ -L - x & -L \le x \le -L/2 \end{cases}$ e la periodica è $F(x-2Lk)$ se $-L+2kL \le x \le L+2kL$. $F(x)$, a seconda dei casi è $\varphi(x)$ resa dispari oppure $\psi(x)$ resa dispari e $F(x)|_{x\in[0,L]} = \varphi(x)$ oppure $F(x)|_{x\in[0,L]} = \psi(x)$

A: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi kx}{2}(A_k \cos c\frac{\pi kt}{2} + B_k \sin c\frac{\pi kt}{2})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = 0$ dà $B_k = 0$ e $A_k = \int_0^1 dx \sin\frac{\pi kx}{2} x + \int_1^2 dx \sin\frac{\pi kx}{2}(2-x) = \frac{8\sin\frac{k\pi}{2}}{(\pi k)^2}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{2}\cos c\frac{\pi(2k+1)t}{2}\frac{8\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{(\pi(2k+1))^2}$

B: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi kx}{2}(A_k \cos c\frac{\pi kt}{2} + B_k \sin c\frac{\pi kt}{2})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $B_k\frac{c\pi k}{2} = \int_0^1 dx \sin\frac{\pi kx}{2} x + \int_1^2 dx \sin\frac{\pi kx}{2}(2-x) = \frac{8\sin\frac{k\pi}{2}}{(\pi k)^2}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2}\cos c\frac{\pi(2k+1)t}{2}\frac{2}{c\pi k}\frac{8\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{(\pi(2k+1))^2}$

C: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{4}(A_k\cos c\frac{\pi kt}{4}+B_k\sin c\frac{\pi kt}{4})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=\varphi(x)$ e $u_t(x,0)=0$ dà $B_k=0$ e $A_k=\int_0^2 dx\sin\frac{\pi kx}{4}x+\int_2^4 dx\sin\frac{\pi kx}{4}(4-x)=\frac{16\sin\frac{k\pi}{2}}{(\pi k)^2}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{4}\cos c\frac{\pi(2k+1)t}{4}\frac{16\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{(\pi(2k+1))^2}$

D: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{4}(A_k\cos c\frac{\pi kt}{4}+B_k\sin c\frac{\pi kt}{4})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=0$ e $u_t(x,0)=\psi(x)$ dà $A_k=0$ e $B_k\frac{c\pi k}{4}=\int_0^2 dx\sin\frac{\pi kx}{4}x+\int_2^4 dx\sin\frac{\pi kx}{4}(4-x)=\frac{16\sin\frac{k\pi}{2}}{(\pi k)^2}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{4}\cos c\frac{\pi(2k+1)t}{4}\frac{4}{c\pi k}\frac{16\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{(\pi(2k+1))^2}$

Problema n.3

Le equazioni sono tutte del tipo $\begin{cases}u_t=u_{xx}\pm t & 0<x<L\\ u(0,t)=u(L,t)=0 & \forall t, u(x,0)=0\end{cases}$

Si sviluppa in serie di Fourier la funzione, detta $F(x)$ che vale 1 per $0\le x<L$ e -1 per $-L\le x<0$ ottenendo $F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{L}\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)$

La soluzione si scrive come $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{L}u_k(t)$ e l'equazione da risolvere è $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{L}(u_k'(t)+(\frac{\pi k}{L})^2u_k(t))=\pm t\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{L}\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)$ ossia

$u_k'(t)+(\frac{\pi k}{L})^2u_k(t)=\pm t\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)$. Per k pari diventa $u_k'(t)+(\frac{\pi k}{L})^2u_k(t)=0$ e la soluzione è $u_k(t)=u_k(0)e^{-\frac{\pi k}{L}t}$. Per k dispari diventa $u_k'(t)+(\frac{\pi k}{L})^2u_k(t)=\pm t\frac{4}{\pi k}$ e la soluzione è $u_k(t)=\overline{u}_ke^{-\frac{\pi k}{L}t}\pm\frac{4}{\pi k}\frac{L}{\pi k}(\frac{L}{\pi k}t-1)$.

Poi va imposta la condizione iniziale $u(x,0)=0$ ossia $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{L}u_k(0)=0$ e quindi $u_k(0)=0$ per ogni k. Per i k pari otteniamo $u_k(0)=0$ e per i k dispari diventa $\overline{u}_k=\pm\frac{4L}{(\pi k)^2}$

Riassumento si ha $u(x,t)=\pm\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{L}(\frac{4L}{(\pi k)^2}e^{-\frac{\pi k}{L}t}+\frac{4L}{(\pi k)^2}(\frac{Lt}{\pi k}-1))$

Problema n.4

Compito A. Usiamo il teorema della divergenza. Detta S la superficie su cui calcolare il flusso, $B=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3: y^2+z^2=1, x=0\}$ e $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2\le 1, x>0\}\cup B$, si ha $\int\int_S(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^e)d\sigma=\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x}))-\int\int_B(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}_B^e)$. $div(\underline{F}(\underline{x}))=-2yz$ e $\underline{n}_B^e=(-1,0,0)$.

$\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x}))=-2\int_0^1 d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^\pi d\vartheta\ \rho^2\sin\vartheta\ \rho^2\sin\vartheta\ \cos\vartheta\ \sin\varphi=0$

$\int\int_B(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}_B^e)=\int\int_B 2xyz=0$ in quanto bisogna imporre $x=0$.

Compito B. Usiamo il teorema della divergenza. Detta S la superficie su cui calcolare il flusso, $B=$

$\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, y = 0\}$ e $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, y > 0\} \cup B$, si ha $\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e) d\sigma =$ $\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x})) - \int\int_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e_B)$. $div(\underline{F}(\underline{x})) = -2xz$ e $\underline{n}^e_B = (0, -1, 0)$.

$\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x})) = -2\int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \ \rho^2 \sin\vartheta \ \rho^2 \sin\vartheta \ \cos\vartheta \ \cos\varphi = 0$

$\int\int_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e_B) = \int\int_B 2xyz = 0$ in quanto bisogna imporre $y = 0$.

Compito C. Usiamo il teorema della divergenza. Detta S la superficie su cui calcolare il flusso, $B = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x = 0\}$ e $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x < 0\} \cup B$, si ha $\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e) d\sigma =$ $\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x})) - \int\int_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e_B)$. $div(\underline{F}(\underline{x})) = -xz^2 - 4xyz$ e $\underline{n}^e_B = (1, 0, 0)$.

$\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x})) = -\int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\vartheta \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi \ \rho^2 \sin\vartheta \rho^3 (\sin\vartheta \ \cos^2\vartheta \ \cos\varphi + 4\sin^2\vartheta \ \cos\vartheta \ \cos\varphi \sin\varphi) = -\frac{\pi}{24}$

$\int\int_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e_B) = \int\int_B yz^2 = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} dt \ \rho \ \rho^2 \cos t \ \sin^2 t = 0$

Compito D. Usiamo il teorema della divergenza. Detta S la superficie su cui calcolare il flusso, $B = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, y = 0\}$ e $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, y < 0\} \cup B$, si ha $\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e) d\sigma =$ $\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x})) - \int\int_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e_B)$. $div(\underline{F}(\underline{x})) = -xz^2 - 6xyz$ e $\underline{n}^e_B = (0, 1, 0)$.

$\int\int\int_V div(\underline{F}(\underline{x})) = \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\vartheta \int_\pi^{2\pi} d\varphi \ \rho^2 \sin\vartheta \rho^3 (\sin\vartheta \ \cos^2\vartheta \ \cos\varphi - 6\sin^2\vartheta \ \cos\vartheta \ \cos\varphi \sin\varphi) = 0$

$\int\int_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e_B) = \int\int_B xyz^2 = 0$ in quanto $y = 0$

Problema n.5

Il problema è praticamente uguale a quello analogo nell'appello del 28-11-05 e le risposte sono A e C $60\delta\sqrt{2}$, B e D $\frac{87}{2}\delta\sqrt{2}$,

Problema n.6

Le forme sono tutte chiuse ma non esatte. Basta osservare che l'integrale lungo le seguenti curve non hanno valore zero. A $y^2 + z^2 = 1$ $x = 0$, B $y^2 + x^2 = 1$ $z = 0$, C e D $x^2 + z^2 = 1$ $y = 0$,